Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 4

Bereits auf dem letzten Blatt haben wir das Gauß'sche Eliminationsverfahren kennengelernt. Es liefert uns systematisch alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems (oder zeigt, dass keine existiert).

Wir wissen, dass die inverse Abbildung zu einer bijektiven linearen Abbildung auch linear ist. Die zugehörige Matrix heißt inverse Matrix und kann auch mit dem Gauß'schen Verfahren bestimmt werden. Später werden wird erfahren, dass sie sich auch mit Hilfe der Determinante ausrechnen lässt. Zuerst zeigen wir, dass Determinante in Dimension 2 eine anschauliche geometrische Bedeutung hat.

Präsenzaufgabe

Diese Aufgabe ist nicht abzugeben und wird am 23. und 24. Mai in den Übungen besprochen.

1. Zeigen Sie Folgendes: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist es AB auch und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure" (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 28. Mai 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= 1 \\ -x + 2y + 7z &= -2 \\ x + 5y + 9z &= 4 \end{aligned}$$

2. Beweisen Sie, dass für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auch A^{-1} und A^T invertierbar sind, wobei

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{und} \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

3. Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Es sei ein Vektor $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement zum Unterraum $\mathbb{R}\boldsymbol{a}$ in $\mathbb{R}^2$ der Unterraum $\mathbb{R}\boldsymbol{n}$ ist, wobei $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dessen Zerlegung $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_\parallel + \boldsymbol{b}_\perp$ mit $\boldsymbol{b}_\parallel \in \mathbb{R}\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}_\perp \in (\mathbb{R}\boldsymbol{a})^\perp$.

(c) Erklären Sie mit einem Bild, warum der Flächeninhalt des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bestimmten Parallelogramms gleich dem Flächeninhalt des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}_\perp$ bestimmten Rechtecks ist.

(d) Zeigen Sie, dass $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ der Flächeninhalt des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bestimmten Parallelogramms ist.